⟨권이태, 0830⟩

전이함수모형

전이함수모형

여러 개의 입력시계열을 갖는 전이함수 모형(ARMAX 모형)의 형태는 아래와 같다.

$$Y_t = \sum_i v_i(L) X_{i,t} + n_t$$

여기에서 $X_{i,t}$는 i번째 입력시계열, $v_i(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_{i,j} L^j$는 j번째 전이함수, n_t는 잡음과정으로 $n_t = \psi(L)\epsilon_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\epsilon_t$처럼 나타난다. 특히 $v_{i,j}$는 **충격반응가중값**, $\psi(L)$은 **선형필터**라 불리기도 한다.

그 적합을 위해서는 아래처럼 추정해야 할 모수의 개수를 제한시키는 방식이 많이 사용된다. 특히 입력시계열이 하나인 경우,

$$Y_t = \frac{w_s(L)}{\delta_r(L)} L^b X_t + n_t$$

를 적합하는 것을 고려할 수 있다. 이때

$$w_s(L) = w_0 - w_1 L - \cdots - w_s L^s$$
$$\delta_r(L) = 1 - \delta_1 L - \cdots - \delta_r L^r$$

이며 b는 지연모수이다.

Definition 1. *만약 $\sum_{j=0}^{\infty} |v_j| < \infty$가 만족된다면, 전이함수가* ***안정적****이라 한다. 이는 입력시계열이 유한인 경우 출력시계열 또한 유한하게 됨을 의미한다.*

Definition 2. *$j < 0$일 때의 충격반응가중값이 0이면, 즉 $v_j = 0$이면 $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j} + n_t$와 같이 쓸 수 있으며, 이때 전이함수를* ***인과적****이라 한다. 이는 입력시계열의 외생성을 나타낸다.*

교차상관함수

Definition 3. *정상인 두 시계열 X_t와 Y_t 사이의* ***교차상관함수****는 다음과 같이 정의된다.*

$$\gamma_{XY}(h) := \mathrm{Cov}(X_t, Y_{t+h})$$

Definition 4. *정상인 두 시계열 X_t와 Y_t 사이의* ***교차상관계수****는 다음과 같이 정의된다.*

$$\rho_{XY}(h) = \mathrm{Corr}(X_t, Y_{t+h}) = \frac{\gamma_{XY}(h)}{\sqrt{\gamma_X(0)\gamma_Y(0)}}$$

인과성을 만족하는 전이함수모형에서,

$$\begin{aligned}
\gamma_{XY}(h) &= \mathrm{Cov}(X_t, Y_{t+h}) \\
&= \mathrm{Cov}(X_t, \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t+h-j} + n_{t+h}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} v_j \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h-j}) + \mathrm{Cov}(X_t, n_{t+h}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} v_j \gamma_X(h-j)
\end{aligned}$$

만약 X_t가 백색잡음이라면, $h-j \neq 0$일 때 $\gamma_X(h-j)=0$이므로,

$$\rho_{XY}(h) = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} v_h \rho_X(0)$$

이며 이를 정리하면

$$v_h = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY}(h)$$

를 얻는다. 따라서 전이함수를 구할 때에는 입력시계열 X_t가 ARMA 모형

$$\phi_X(L)X_t = \theta_X(L)\alpha_t,\ \alpha_t \sim WN(0, \sigma_\alpha^2)$$

을 따른다고 한 다음 **사전백색화**된 백색잡음 $\alpha_t = \frac{\phi_X(L)}{\theta_X(L)} X_t$를 이용한다. 전이함수모형

$$Y_t = v(L)X_t + n_t$$

의 양변에 $\frac{\phi_X(L)}{\theta_X(L)}$을 가하여

$$\beta_t = \frac{\phi_X(L)}{\theta_X(L)} Y_t$$
$$e_t = \frac{\phi_X(L)}{\theta_X(L)} n_t$$

로 놓으면 새 전이함수모형 $\beta_t = v(L)\alpha_t + e_t$에서 입력시계열 α_t가 백색잡음이므로,

$$v_h = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \rho_{\alpha\beta}(h)$$

로 구할 수 있게 된다.

전이함수모형의 적합

1. 전이함수모형에서 X_t와 Y_t는 모두 정상시계열을 따른다고 가정한다. 따라서 먼저 X_t와 Y_t에 대한 정상성 검정을 수행하고, 정상성이 만족되지 않는다면 차분이나 분산안정화변환 등을 수행한다.

2. 전이함수모형의 식별을 수행하기 위해

$$Y_t = v(L)X_t + n_t$$

를 세우고,

(a) 입력시계열 X_t에 ARMA 모형 $\phi_X(L)X_t = \theta_X(L)\alpha_t$를 적당한 시차를 선택하여 적합하여 사전백색화된 시계열 $\alpha_t = \frac{\hat{\phi}_X(L)}{\hat{\theta}_X(L)} X_t$를 구한다.

(b) 사전백색화 필터 $\frac{\hat{\phi}_X(L)}{\hat{\theta}_X(L)}$를 적용하여 변환된 전이함수모형

$$\beta_t = v(L)\alpha_t + e_t$$

를 구한다.

(c) α_t와 β_t 사이의 표본교차상관계수 $\hat{\rho}_{\alpha\beta}(h)$를 구한 다음, 이를 이용하여

$$\hat{v}_h = \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\hat{\sigma}_\alpha} \hat{\rho}_{\alpha\beta}(h)$$

를 구한다.

(d) 만약 α_t와 β_t가 서로 상관이 없고 α_t가 백색시계열이라면 $\mathrm{Var}(\hat{\rho}_{\alpha\beta}(h)) \approx (T-h)^{-1}$임을 이용하여, 유의성 검정을 수행한다.

(e) 지연모수가 b일 때

$$\begin{aligned}
v_j &= 0 && j < b \\
v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} + w_0 && j = b \\
v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} - w_{j-b} && j = b+1, \cdots, b+s \\
v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} && j > b+s
\end{aligned}$$

의 관계가 성립함을 이용하여, r, s, b를 잠정적으로 결정한 후 $\hat{\delta}_j, \hat{w}_k$를 구하고 이로써 초기 추정값 $\hat{v}(L) = \hat{w}_s(L)\hat{\delta}_r^{-1}(L)L^b$을 구한다.

3. 오차모형의 식별을 위하여

$$\hat{n}_t = Y_t - \hat{v}(L)X_t$$

를 구한 뒤, 여기에 적절한 차수의 ARMA 모형

$$\phi(B)n_t = \theta(B)\epsilon_t$$

을 적합시킨 뒤

$$Y_t = \frac{\hat{w}_s(L)}{\hat{\delta}_r(L)}X_{t-b} + \frac{\hat{\theta}(L)}{\hat{\phi}(L)}\epsilon_t$$

을 모형으로 사용한다.

4. 잠정적으로 추정된 모델

$$Y_t = \frac{w_s(L)}{\delta_r(L)}X_{t-b} + \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\epsilon_t$$

에서 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_r)^T, w = (w_0, w_1, \cdots, w_s)^T, \phi = (\phi_1, \cdots, \phi_p)^T, \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_q)^T$과 σ_ϵ^2을 조건부 가능도함수법, 조건부최소제곱법 등을 통하여 구하고, 최종적으로 계수들을 결정하여 전이함수모형을 적합한다.

전이함수모형의 진단

전이함수모형이 적합되면 잔차를 통해 진단을 수행한다.

1. ϵ_t의 백색잡음 여부 판정을 위하여 자기상간을 검토할 수 있다. 적합된 잔차 $\hat{\epsilon}_t$로부터 그 표본자기상관계수 $\hat{\rho}_\epsilon$을 구한 다음, 포트맨토 검정의 Q검정통계량

$$Q = T(T+2)\sum_{j=1}^{K} \frac{1}{T-j}\hat{\rho}_\epsilon^2(j) \sim \chi^2(K-p-q)$$

을 통하여 검정한다.

2. 오차와 입력시계열 사이의 독립 여부를 판정하기 위해 교차상관을 검토할 수도 있다.

$$\hat{\rho}_{\alpha\epsilon}(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^{T_{\max}} \alpha_{t-h}\hat{\epsilon}_t}{\left(\sum_{t=1}^{T_{\max}} \alpha_t^2 \sum_{t=1}^{T_{\max}} \hat{\epsilon}_t^2\right)^{1/2}}$$

을 $T_{\max} = T - p - \max(r, s+b)$에 대해 계산한 뒤, 그 분산이 근사적으로 $(T-h)^{-1}$임을 이용해

검정하거나 포트맨토검정의 검정통계량

$$Q = T_{\max}(T_{\max}+2)\sum_{j=0}^{K}\frac{1}{T_{\max}-j}\hat{\rho}_{\alpha\epsilon}(j)^2 \sim \chi^2(K-(r+s))$$

을 이용해 검정할 수 있다. 자유도는 $K+1$에서 전이함수측에 해당하는 모수의 개수 $r+s+1$을 감하여 $K-(r+s)$로 나타난다.

1 전이함수모형의 예측

전이함수모형에서

$$Y_t = \frac{w_s(L)}{\delta_r(L)}L^b X_t + \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\epsilon_t, \quad \phi_X(L)X_t = \theta_X(L)\alpha_t$$

임을 이용하여

$$\begin{aligned} u(L) &= \frac{w_s(L)L^b\theta_X(L)}{\delta_r(L)\phi_X(L)} \\ \psi(L) &= \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \end{aligned}$$

을 정의하면,

$$Y_t = u(L)\alpha_t + \psi(L)\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\alpha_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-j}$$

이므로 t 시점에서 Y_{t+l}의 최적예측값은

$$\hat{Y}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{l+j}\alpha_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_{l+j}\epsilon_{t-j}$$

으로 주어지고 예측오차는

$$Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} u_j\alpha_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{l-1}\psi_j\epsilon_{t+l-j}$$

이다. 이로부터 그 MSE, 혹은 분산은

$$V(l) = \sum_{j=0}^{l-1}(\sigma_\alpha^2 u_j^2 + \sigma_\epsilon^2\psi_j^2)$$

으로 나타난다.