권이태

Problem. 1. *랜덤표본* $X_1, \cdots, X_n$*을* $Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$*에서 관측했다고 하자.* $n \geq 2$*이다. 이제* $\theta = e^{-\lambda}$*를 추정하려고 한다.* $\hat{\theta} := I(X_1 = 0)$*는* θ*의 불편추정량이다.* $\hat{\theta}$*보다 분산이 작은* θ*의 불편추정량을 구하고, 새롭게 찾은 불편추정량의 분산이* $\hat{\theta}$*의 분산보다 작은 것을 각각을 직접 구함으로써 보여라.* $n \geq 2$*임을 가정한다.*

Problem. 2. $X_1, \cdots, X_n$은 분산이 $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$인 임의의 분포에서 뽑은 *IID* 표본이다.

(a) $\delta = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$가 σ^2의 불편추정량임을 보여라.

(b) 만약 X_i가 $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$인 이진형 변수라고 하면, δ가 σ^2의 *UMVUE*임을 보여라.

Problem. 3. $X_i \sim_{i.i.d} \text{Exp}(\theta_x), \quad Y_i \sim_{i.i.d} \text{Exp}(\theta_y), \quad i = 1, 2, \cdots, n$이며

$$Z_i = \min\{X_i, Y_i\}, \quad \Delta_i = I(X_i \geq Y_i)$$

라고 하자. $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots, X_n, Y_n\}$*은 독립이며,* θ_x, θ_y*는 모두 양수이다. 또한* X_i, Y_i*의 기대값은 각각* $\theta_x^{-1}, \theta_y^{-1}$*이다. 이때 우리는* (Z_i, Δ_i)*만 관측할 수 있다.*

(a)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i, \sum_{i=1}^{n} \Delta_i Z_i, \sum_{i=1}^{n} (1 - \Delta_i) Z_i\right)$$

이 충분통계량임을 보여라.

(b) 다음 식의 기댓값을 구하시오.

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i Z_i - (1-\Delta_i)Z_i)$$

Problem. 4. *(a) 확률변수 X의 분포를 $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$에 대하여 P_θ라고 하자. θ의 불편추정량 $\delta(X)$가 $E_\theta[\delta^2(X)] < \infty$를 만족한다고 하자. 또한 $\mathcal{U}$를*

$$E_\theta[U(X)] = 0, \quad E_\theta[U^2(X)] < \infty$$

가 성립하는 X를 통해 얻어진 통계량들의 집합이라고 하자. 그렇다면 모든 $U \in \mathcal{U}, \theta \in \Omega$에 대하여

$$E_\theta[\delta(X) \cdot U] = 0$$

가 성립한다면 $\delta(X)$가 전역최소분산불편추정량임을 보여라.

(b) 확률변수 X가 $-1, 0, 1, 2, \cdots$ 의 값을 각각

$$P(X=-1)=p, \quad P(X=k)=(1-p)^2p^k, \quad k=0,1,2,\cdots$$

의 확률로 가진다고 하자. 이때 $0<p<1$*이다. 이때* $I(X=0)$*가* $q^2=(1-p)^2$*의 전역최소불편추정량임을 보여라.*