권이태

Problem. 1. *$MA(1)$ 모형을 따르는 아래의 시계열을 고려한다.*

$$Y_t = \epsilon_t + \psi\epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

(a) 이 시계열이 가역성(invertibility)을 갖는 시계열일 조건을 구하라.

(b) $\psi = 0.8$일 경우 가역성이 성립하는지 말하고, 만약 가능하다면 Y_t에 대한 $MA(1)$ 모형을 $AR(\infty)$ 모형으로 변환하여라.

(c) ψ가 (a)의 조건을 만족하지 못하며 $|\psi| \neq 1$이라 하자. 이때 $\tilde{\psi} = \psi^{-1}$과 $\tilde{\epsilon}_t \sim_{i.i.d.} N(0, \tilde{\sigma}^2)$에 대하여

$$Y_t = \tilde{\epsilon}_t + \tilde{\psi}\tilde{\epsilon}_{t-1}$$

로 표현할 수 있음을 보여라. 또한 $\tilde{\sigma}^2$의 값을 ψ, σ^2의 함수로 표현하여라.
(Hint: $\tilde{\epsilon}_t = \epsilon_t - \sum_{j=1}^{\infty}(-\tilde{\psi})^j(\psi^2 - 1)\epsilon_{t-j} \sim_{i.i.d.} N(0, \tilde{\sigma}^2)$가 $\tilde{\sigma}^2$에 대해 성립함을 이용하여도 좋다.)

(d) $|\psi| \neq 1$일 때, (a)에서 구한 조건을 만족하지 못하여 (c)에서 변환한 Y_t의 표현이 (a)에서 구한 조건을 항상 만족함을 보여라.

Problem. 2. *크기 $n = 100$인 시계열 자료에 다음과 같은 모형이 적합되었다.*

$$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

편의상 이들의 이들의 추정량을 $\hat{\theta}$ 대신 θ와 같이 쓰기로 하자. 즉 σ^2은 잔차로부터 구한 innovation의 분산 추정량이다.

(a) $|\phi| < 1$, $|\theta| < 1$일 때, $100 + l$기의 Z_t값에 대한 예측값과 95퍼센트 예측구간을 구하여라.

(b) 만약 $\phi = 1$이라면, 예측값의 형태는 어떻게 되는가?

Problem. 3. *자료 $X_1, \cdots, X_n$에 기초하여 선택된 잠정 모형이 정상 $ARMA(p,q)$ 모형*

$$\phi(L)(X_t - \mu) = \theta(L)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

이라고 한다.

(a) 적합 결과로써 얻은 추정량이 각각 $\hat{\phi}(L)$과 $\hat{\theta}(L)$, 그리고 $\hat{\mu}$이다. $\hat{\theta}(z)$의 근 중 $|z| \le 1$인 것이 없다고 할 때, 잔차 e_t를 구하시오.

(b) 잔차의 표본자기상관함수

$$\rho_e(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(e_t - \bar{e})(e_{t+k} - \bar{e})}{\sum_{t=1}^{n}(e_t - \bar{e})^2}$$

를 고려하자. 이는 ϵ_t의 자기상관함수 $\rho(k)$의 추정량이다. 모형이 참이라면 $\rho(k)$의 값은 $k \ge 1$에 대해 어떤 값을 가질지 말하고, 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 이를 확인하기 위한 근사적 검정을 제시하시오.

(c) 잔차의 표본자기상관함수를 이용한 검정의 단점에 대해 논하시오.

(d)

$$Q = n(n+2)\sum_{h=1}^{K} \rho_e(h)^2/(n-h)$$

를 검정통계량으로 하는 포트맨토 검정이 (b)의 검정보다 나은 점을 말하고, 유의수준이 $\alpha = 0.05$*일 때 근사적 기각역을 제시하시오.*

Problem. 4. *다음과 같은 계절형 ARIMA 모형이 주어져 있다.*

$$(1 - \phi L)Z_t = (1 - \theta L)(1 - \Theta L^4)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

(a) 위의 모형을 따르는 시계열자료의 ACF를 $\rho(h)$라 할 때, $\rho(1)$의 값을 구하시오.

(b) 만약 위 모형 대신에

$$(1 - \phi L)Z_t = (1 - \theta_1 L - \theta_4 L^4 - \theta_5 L^5)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma^2)$$

인 모형이 적합되는 경우, 어떤 차이점이 있는지 이야기하시오.

Problem. 5. $VAR(1)$ 모형

$$\begin{pmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -1.0 \\ -0.24 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim_{i.i.d.} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t})^T$ *의 공적분 계수가 1임을 확인하고, 공적분 관계식을 구하여라.*

(b) *다음은* Z_t*를 이용한 오차수정 모형이다.* α, β, δ*를 구하여라.*

$$\begin{pmatrix} \Delta Z_{1,t} \\ \Delta Z_{2,t} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

또, $\begin{pmatrix} 1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix}$*를 (a)와 비교함으로써 이것이 무엇을 의미하는지 밝혀라. 만약 시계열이 공적분 관계에서 단기적으로* η_{t-1} *만큼 이탈한 경우,* $Z_{1,t}$*와* $Z_{2,t}$*의 변화 정도(*$\Delta Z_{1,t}, \Delta Z_{2,t}$*)는 평균적으로 어떠하겠는가? 다음 기의 이탈 정도에 대한 기대값은 어떠한가?*