⟨**권이태, 0802**⟩

단위근검정

Diceky-Fuller 검정

다음과 같은 AR(1) 과정을 생각해 보자.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \epsilon_t$$

이때 $\epsilon_t \sim W.N.(0, \sigma^2)$이다. 잘 알려져 있듯, $|\phi| < 1$일 때에 이 시계열은 정상시계열이 된다.
한편 단위근검정에서는 $\phi = 1$인지를 판정하려 한다. 일반적으로 그 검정에는 ϕ의 최소제곱추정량 $\hat{\phi}$를 이용한다. 이때 아래의 세 가지 모형이 존재하며, 각 모형 하에서 $\hat{\phi}$의 분포가 다르기에 자료의 성질에 맞는 검정법을 택해야만 한다.

Case 1
실제 모형: $Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 없는 확률보행과정)
적합 모형: $Z_t = \phi Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 없는 AR(1) 과정)
이때 귀무가설 $\phi = 1$ 하에서 ϕ-statistic은 Wiener process W에 대하여

$$T(\hat{\phi} - 1) = \frac{T^{-1}\sum_{t=2}^{T} Z_{t-1}Z_t}{T^{-2}\sum_{t=2}^{T} Z_{t-1}^2} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW}{\int_0^1 W(r)^2 dr}$$

, t-statistic은

$$t_T = \frac{\hat{\phi} - 1}{\hat{\sigma}} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}}$$

으로 점근분포를 가진다. 따라서 이를 바탕으로 분포표에서 분위수를 확인하여 각 통계량의 값이 충분히 작으면 귀무가설 $H_0 : \phi = 1$을 기각할 수 있다.

Case 2
실제 모형: $Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 없는 확률보행과정)
적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 있는 AR(1) 과정)
실제 데이터가 절편이 없는 확률보행과정을 따르는데 이를 절편이 있는 과정으로 적합하는 경우, $\hat{\phi}$에 대한 두 통계량은 아래의 점근분포를 가진다.

$$T(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW - W(1)\int_0^1 W(r)dr}{\int_0^1 W(r)^2 dr - \left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^2}$$

$$t_T \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW - W(1)\int_0^1 W(r)dr}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr - \left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^2\right)^{1/2}}$$

한편 일반적으로는 귀무가설로 $H_0 : \phi = 1$보다는 $H_0 : \phi = 1, \delta = 0$을 사용한다. 왜냐하면 $H_0 : \phi = 1$은 절편이 있는 확률보행과정 역시 허용하는데, 이는 결정적 추세를 가지게 되어 실제 데이터와 멀어지기 때문이다. 따라서 이에 대해 OLS F검정통계량을 통해 동시검정을 하는 방법이 더욱 적절하다고 생각된다.
같은 이유로, 아래 역시 허용되지 않는다.
실제 모형: $Z_t = \delta + Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 있는 확률보행과정; 결정적 추세 **존재**)
적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 있는 AR(1)과정; 결정적 추세 **부재**)

Case 3

실제 모형: $Z_t = \delta + Z_{t-1} + \epsilon_t$ (절편이 있는 확률보행과정; 결정적 추세 존재)

적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \beta t + \epsilon_t$ (절편과 **추세**가 포함된 모형)

이때에도 마찬가지로 $T(\hat{\phi} - 1)$과 t_T는 적절한 수렴성을 갖는다. 여기에서도 마찬가지로, $\phi = 1$과 $\beta = 0$을 동시에 검정하는 상황이 더욱 선호된다. 이때 F검정통계량을 마찬가지로 사용한다. 주의할 것은 **Case 2**와 **Case 3** 모두에서 F통계량은 그 형태만 F통계량의 형태일 뿐 실제로 F분포를 따르지는 않으며, Dickey와 Fuller가 시뮬레이션을 통해 얻은 별도의 분포표를 따라 검정해야 한다. 이 경우의 검정은 시계열의 추세가 존재할 때 이 추세가 절편 δ에 의한 것인지, 혹은 실제적인 추세 βt의 존재에 따른 것인지를 파악하는 효과도 있다.

따라서 일반적으로 데이터를 보고 나서, 평균수준이 0으로 생각되면 **Case 1**을, 평균수준이 0이 아니나 추세가 없다면 **Case 2**를, 추세가 존재하는 경우 **Case 3**을 선택하여 검정하는 것이 올바르다.

Augmented Dickey-Fuller 검정

만약 시계열자료가 AR(p)를 따르는 경우, Dickey-Fuller 검정을 적용하기에 무리가 있다. 시계열자료가 AR(p)를 따른다면,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \epsilon_t$$

로 쓸 수 있을 것이다. 이때 $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p$, $\xi_j = -[\phi_{j+1} + \phi_{j+2} + \cdots + \phi_p]$를 정의하면, **ADF representation**

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \xi_2 \Delta Z_{t-2} + \cdots + \xi_{p-1} \Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$$

를 얻게 된다.

한편 이 시계열이 단위근을 가질 경우, 특성방정식

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$$

이 근 $z = 1$을 가지므로

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p = 1$$

을 얻는다. 따라서 ADF representation 하에서 $\phi = 1$을 검정하는 것이 단위근검정이 된다.

만약 귀무가설이 참이라면, 즉 $\phi = 1$이라면,

$$\Delta Z_t = Z_t - \phi Z_{t-1} = \xi \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1} \Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$$

으로 ΔZ_t가 AR($p-1$) 과정을 따르게 된다. 한편 AR(1) 모형 하에서

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \epsilon_t$$

를 검정할 때, $\phi = 1$이라면 $\epsilon_t = \Delta Z_t$이다. 즉 ϵ_t의 독립성을 가정하는 일반적인 DF 검정과 달리, ADF 검정에서는 오차항에 자기상관이 존재할 수 있다고 가정함으로써 이를 AR(p) 모형에까지 확장하였다고 볼 수 있다.

한편 여기에서도 마찬가지로 세 가지의 케이스가 존재한다. DF 검정의 스피릿과 동일하게, 서로 비교가능한 실제 모형과 적합모형 사이에서 검정을 수행한다. 단지 다른 것은 오차항의 자기상관성을 허용함에 따라 검정통계량이 살짝 달라졌다는 것뿐이다.

Case 1

실제 모형: $Z_t = Z_{t-1} + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1} \Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$

적합 모형: $Z_t = \phi Z_{t-1} + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1} \Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$

이때 검정통계량은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
Z_\phi &= \frac{T(\hat{\phi}-1)}{1-\hat{\xi}_1-\cdots-\hat{\xi}_{p-1}} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dr}{\int_0^1 W(r)^2 dr} \\
t_T &= \frac{\hat{\phi}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dr}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}}
\end{aligned}
$$

즉 동일한 검정통계량의 분포를 따르지만, Z_ϕ에서 오차항의 자기상관을 고려하여 $1-\hat{\xi}_1-\cdots-\hat{\xi}_{p-1}$로 나눠준 것만 다르다.

Case 2

실제 모형: $Z_t = Z_{t-1} + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1}\Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$

적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1}\Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$

동일한 방식으로 Z_ϕ와 t_T를 구할 수 있으며, 동일한 조정을 취하면 DF 검정의 **Case 2**와 동일한 극한분포를 가진다. OLS F검정 역시 마찬가지로 DF 검정에서와 동일하다.

Case 3

실제 모형: $Z_t = \delta + Z_{t-1} + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1}\Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$

적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \beta t + \xi_1 \Delta Z_{t-1} + \cdots + \xi_{p-1}\Delta Z_{t-p+1} + \epsilon_t$

검정통계량과 OLS F검정통계량의 분포는 역시 적절한 조정을 취한다면 DF 검정의 **Case 3**과 같다.

Phillips-Perron 검정

DF 검정에서 ADF 검정으로 발전하며 AR(p)를 가정하여 단위근을 검정하는 방법을 배웠다. 이는 사실상 오차항 ϵ_t의 독립성 가정을 포기하고 자기상관을 허용함으로써 이루어진 것이다. PP 검정에서는 이를 더욱 확장하여 오차항 ϵ_t의 자기상관성을 AR($p-1$) 모형 대신 MA(∞) 모형을 통해 처리한다.
먼저 **Beverage-Nelson 분해**에 대해 알아 보자.

$$Z_t = Z_{t-1} + u_t$$

라고 할 때, u_t가 $MA(\infty)$ 모형을 따라

$$u_t = \Psi(L)\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$$

라 하자. $\epsilon_t \sim W.N.(0,\sigma^2)$이며 $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$를 만족한다고 하자. 그렇다면 초기값이 Z_0인 시계열 Z_t는

$$
\begin{aligned}
Z_t &= Z_{t-1} + u_t \\
&= Z_{t-2} + u_{t-1} + u_t \\
&= \cdots \\
&= Z_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{t-1} + u_t \\
&= \psi(1)(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_t) + \eta_t - \eta_0 + Z_0
\end{aligned}
$$

처럼 쓸 수 있다. 이때 $\psi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j$, $\eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j}$, $\alpha_j = -\sum_{k=j+1}^{\infty} \psi_k$이다. 한편 조건에 의하여 $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$이기에 η_t는 잘 정의되는 정상시계열이다. ADF 검정에서는 u_t가 AR($p-1$)을 따름을 가정하는데, 이를 MA(∞)로 변환하면 BN 분해를 위한 가정을 잘 만족함이 알려져 있다. PP 검정은 적절한 수정항을 추가함으로써 AR(p)로부터 비롯되는 MA(∞) 모형이 아닌 일반적인 MA(∞) 모형을 따르는 u_t에 대해서도 단위근 검정을 수행할 수 있게 한다.

BN 분해 하에서 η_t는 정상성을 갖는 과정이고 Z_0, η_0는 고정된 값이다. 따라서 $\sqrt{T}\bar{u}$ 따위의 점근분포를 구하려 할 때, $\sqrt{T}\psi(1)\bar{\epsilon}$이 큰 도움이 된다. 자기상관성을 가지는 u_t들에 비해 ϵ_t는 독립성을 가져 계산이 쉬우므로, 점근분포의 계산에 큰 역할을 한다. Hamilton 책의 506p를 보면 그 과정이 꽤 자세하게 등장한다.
과정은 생략하고, 아래의 값들을 정의하여 보자.

$\hat{u}_j$: 적절한 모형 하에서 구한 잔차

$\hat{\sigma}^2_{\hat{\phi}}$: 적절한 모형 하에서 구한 추정량의 분산

$s_T^2 = \dfrac{1}{T-2}\sum_{t=2}^{T}\hat{u}_t^2 \quad (u_t$ 분산의 OLS 추정량)

$\hat{\gamma}_j = \dfrac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}\hat{u}_t\hat{u}_{t-j}$

$\hat{\lambda}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2\sum_{j=1}^{q}[1 - j/(q+1)]\hat{\gamma}_j \quad$ (q시점까지 자기공분산함수가 유의해 보이는 경우의 Newey-West 추정량)

$\Delta_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{T^2\hat{\sigma}^2_{\hat{\phi}}}{s_T^2}\right)(\hat{\lambda}^2 - \hat{\gamma}_0)$

$\Delta_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{T\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}}{s_T}\right)\dfrac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\gamma}_0}{\hat{\lambda}}$

그렇다면, 조정된 통계량

$$Z_{\phi}^* = T(\hat{\phi} - 1) - \Delta_1$$

는 각 케이스에서 DF 검정에서의 $T(\hat{\phi} - 1)$와 동일한 점근분포를 따른다.
만약 t통계량을 이용하고자 한다면, 아래의 조정을 이용할 수 있다.

$$t_T^* = \left(\frac{\hat{\gamma}_0}{\hat{\lambda}^2}\right)^{1/2} t_T - \Delta_2$$

이 역시 각 케이스에서 DF 검정에서의 t_T와 동일한 점근분포를 따른다.
한편 마지막으로 $\hat{u}_t$를 구하는 방법에 대해 의문이 있을 수 있다. 각 케이스와 해당 경우의 $\hat{u}_t$를 알아 보자.

Case 1

실제 모형: $Z_t = Z_{t-1} + u_t,\ u_t = \Psi(L)\epsilon_t$
적합 모형: $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$
잔차: $\hat{u}_t = Z_t - \hat{\phi}Z_{t-1}$

Case 2

실제 모형: $Z_t = Z_{t-1} + u_t,\ u_t = \Psi(L)\epsilon_t$
적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + u_t$
잔차: $\hat{u}_t = Z_t - \hat{\delta} - \hat{\phi}Z_{t-1}$

Case 3

실제 모형: $Z_t = \delta + Z_{t-1} + u_t,\ u_t = \Psi(L)\epsilon_t$
적합 모형: $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \beta t + u_t$
잔차: $\hat{u}_t = Z_t - \hat{\delta} - \hat{\phi}Z_{t-1} - \hat{\beta}t$

즉 종합하면 단위근검정에서는 크게 두 가지를 고려해야 한다. 첫째. 어떤 검정을 사용할 것인가? 둘째. 그리고 어떤 모형을 가정할 것인가? 분석하고자 하는 시계열에서 오차항의 자기상관구조, 시계열의 평균과 추세를 고려하여 9개 케이스 중 하나를 잘 택한 뒤 검정해야만 할 것이다.